UFSC - CÁLCULO D - 2014.2 - 2A. PROVA

RAPHAEL DA HORA

(1) Calcule $5 - 3 + \frac{9}{5} - \frac{27}{25} + \cdots$. (1,0 ponto)

(2) Quais das seguintes séries são **divergentes**? (1,5 ponto)

$$\text{I. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+4n+8} \quad \text{II. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n\pi}{n^3+2} \quad \text{III. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{3^n n^n}.$$

(3) Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ converge. (1,5 ponto)

(4) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$, onde $a_n = \frac{n^2 5^n}{n!}$. Dica: considere $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (1,0 ponto)

(5) Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge. (1,0 ponto)

(6) Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2x)^n}{3^n n}$ converge. (1,5 ponto)

(7) Calcule $\frac{d^6 f}{dx^6}(0) = f^{(6)}(0)$, onde $f(x) = \ln(1+2x^2)$. (1,0 ponto)

(8) Encontre a série de potências da função $f(x) = \frac{2x}{(3-2x)^2}$ e determine onde ela converge. (1,5 ponto)

SOLUÇÃO

1. Temos que

$$5-3+\frac{9}{5}-\frac{27}{25}+\cdots=5\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n=\frac{5}{1-(-3/5)}=\frac{25}{8}.$$

2. Temos que

$$\text{I. }\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+4n+8}=\frac{1}{2}\neq 0,\ \text{logo }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+4n+8}\text{ diverge.}$$

$$\text{II. }\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n+\cos n\pi}{n^3+2}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right),$$

logo como $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)$ converge (pelo teste da $p-$série), $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\cos n\pi}{n^3+2}$ também converge (pelo teste da comparação).
Agora pelo teste da raíz

$$\text{III. }\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{n^2}}{3^n n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{3n}=\infty>1,$$

logo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n^2}}{3^n n^n}$ diverge.

3. Temos que

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{N\to\infty}\left[\ln(\ln x)\right]_2^N=\infty,$$

logo $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ diverge.

4. Temos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 5^n}{n!}$ converge, pois pelo teste da razão

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 5^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^2 5^n}=5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Portanto $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 5^n}{n!}=0.$

5. Temos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

ainda mais, se $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, temos que

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0,\ \text{se } x>e,$$

i.e., $\dfrac{\ln n+1}{n+1} < \dfrac{\ln n}{n}$ se $n \geq 3$. Logo, segue do teste da série alternada, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge.

6. Temos que

$$\lim n \to \infty \left|\frac{(1-2x)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)} \frac{3^n n}{(1-2x)^n}\right| = \frac{|1-2x|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|1-2x|}{3},$$

logo segue do teste da razão que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2x)^n}{3^n n}$ converge se $\dfrac{|1-2x|}{3} < 1$, i.e., $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{3}{2}$, i.e., $x \in (-1, 2)$.

Se $x = -1$, $1-2x = 3$, e sabemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Agora se $x = 2$, $1-2x = -3$ e sabemos que $sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^n}{3^n n} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ converge. Portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2x)^n}{3^n n}$ converge se $x \in (-1, 2]$.

7. Sabemos que se $|2x^2| < 1$, i.e., $|x| < \sqrt{2}/2$,

$$\ln(1+2x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x^2)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{n+1}x^{2n+2}}{n+1}.$$

Agora, vimos que qualquer função suave que pode ser escrita como série de potências, esta série tem que ser a série de Taylor daquela função. Logo

$$\frac{d^6 f}{dx^6}(0) = f^{(6)}(0) = 6!\left(\frac{(-1)^2 2^3}{3}\right) = 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 1320.$$

8. Temos que

$$\frac{2x}{(3-2x)^2} = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3-2x}\right).$$

Agora se $|2x/3| < 1$, i.e., $|x| < 3/2$,

$$\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-2x/3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}x^n.$$

Logo, se $|x| < 3/2$,

$$\frac{2x}{(3-2x)^2} = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3-2x}\right) = x\frac{2x}{(3-2x)^2} = x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{3^{n+1}}x^n.$$